SIGMA
7(1) 1981
pág.19-22

UN ESQUEMA DE MUESTREO DETERMINISTICO PARA OBTENER SERIES DE TIEMPO LIBRES DE ALIASING.

Eduardo Engel G. *

RESUMEN:

Al muestrear equiespaciadamente un proceso estocástico estacionario continuo, en la serie de tiempo discreta resultante se confunden amplitudes asociadas a frecuencias distintas. Este fenómeno se conoce con el nombre de "aliasing" y con objeto de evitarlo parece natural estudiar esquemas de muestreo no equiespaciado.

Shapiro y Silverman (1960) encontraron un esquema de muestreo estocástico tal que las series resultantes no presentan aliasing.

En el presente trabajo se presenta un esquema de muestreo determinístico, consistente en muestrear en los instantes correspondientes a las sumas parciales de una serie divergente cuyo término general tiende a cero, mediante el cual se obtiene una serie de tiempo libre de aliasing.

ABSTRACT:

When sampling a stationary stochastic process at equal intervals in time, amplitudes corresponding to different frequencies become indistinguishable. This phenomenon is called "aliasing". It is then natural to study unequally spaced sampling schemes so as to avoid it.

Shapiro and Silverman (1960) found a stochastic alias free sampling technique. In this work a deterministic alias free sampling technique is presented. It is based on choosing the sampling instants as the partial sums of a divergent series whose general term tends to zero.

---

* Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias Físicas y Matemáticas, U. de Chile, Casilla 5272, Correo 3, Santiago - Chile.

PALABRAS CLAVES:

Series de tiempo, análisis espectral, series no equiespaciadas, muestreo no equiespaciado, aliasing.

TEOREMA 1:

El objeto de esta breve nota es presentar un teorema que muestra la existencia de un esquema de muestreo determinístico libre de aliasing.

Sea $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ un proceso estocástico estacionario de segundo orden de media nula.

Sea

$$X_k = X(t_k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

donde $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de números reales que verifica

i) $\lim\limits_{k \to \infty} (t_{k+1} - t_k) = 0$

ii) $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = + \infty$

Entonces el proceso muestreado $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ no presentará aliasing.

DEMOSTRACION:

Si hubiera aliasing existirían frecuencias λ_1 y λ_2 indistinguibles en el proceso muestreado.

Sin perder generalidad se supondrá $\lambda_1 > \lambda_2$.

Considerando la representación espectral de un proceso estacionario (ver Koopmans [2]) se tiene que

$$X_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t_k}\, dZ_\lambda$$

Como consecuencia de esto y del hecho que $x \longmapsto e^{ix}$ tiene período 2π se tendrá que λ_1 y λ_2 serán indistinguibles si y sólo si:

Cualesquiera sea $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$\lambda_1 t_k = \lambda_2 t_k + 2\pi n_k$$

o equivalentemente

$$(\lambda_1 - \lambda_2) t_k = 2\pi n_k \qquad (1)$$

Tomando lo anterior para k y (k-1) y restando resulta

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(t_k - t_{k-1}) = 2\pi (n_k - n_{k-1}) \qquad (2)$$

Tomando límite cuando k tiende a $+\infty$ en (1) se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \qquad (3)$$

y haciendo lo mismo en (2):

$$\lim_{k\to\infty} (n_k - n_{k-1}) = 0 \qquad (4)$$

Por ser $(n_k)_{k\in \mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales, (3) y (4) son incompatibles, siendo el origen de esta contradicción el haber supuesto que había aliasing

Q.E.D.

COMENTARIOS:

1.- Se exige que $(t_k)_{k\in \mathbb{N}}$ sea creciente sólo con objeto de que el proceso $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ quede ordenado en el tiempo.

2.- Un caso particular en que se verifican las hipótesis de la proposición es cuando $(t_k)_{k\in \mathbb{N}}$ corresponde a la sucesión de las sumas parciales de la serie armónica.

BIBLIOGRAFIA :

[1] Shapiro, H.S. y R.A. Silverman. Alias free sampling of random noise J. Soc. Ind. Appl. Math.,8,225-248, 1960.

[2] Koopmans, L.H. The Spectral Analysis of Time Series, Academic Press, 1974.

[3] Engel, E. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y su Aplicación al Modelamiento Estadístico de Series en tiempo Continuo. (Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Matemático), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile,1980.